Piąty Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W świecie matematyki"

im. Prof. Włodzimierza Krysickiego

Etap pierwszy

11 lutego 2013 r.

Maksymalna do zdobycia ilość punktów: 80

1. Prawdziwa jest nierówność
[ ] $\log_2(\log_2 2) \geq 0$;
[ ] $\log_2(\log_2 16) \leq 2$;
[ ] $\log_2\left(\log_2 \sqrt{2}\right) \leq 0$.
2. Wariancja danych 2, 4, 5, 5, 7, 8, x jest równa 4, jeśli
[ ] $x = 0$;
[ ] $x = 4$;
[ ] $x = 8$.
3. Trójkąt ABC ma boki o długościach $\sqrt{15}$ cm, $\sqrt{30}$ cm i $\sqrt{45}$ cm. Wówczas
[ ] istnieje trójkąt $A'B'C'$ podobny do trójkąta ABC, który ma obwód 90 cm;
[ ] jeden z kątów tego trójkąta ma miarę $30°$;
[ ] bryła powstała po obrocie trójkąta wokół najkrótszego z boków ma objętość większą od 100 cm^3.
4. W biegu na 10 kilometrów bierze udział 39 par, każda składająca się z dwóch bliźniąt. Czas uzyskany przez daną parę jest średnią arytmetyczną czasów uzyskanych przez dwójkę bliźniąt wchodzących w jej skład. Przy założeniu, że wszyscy uczestnicy ukończyli zawody i żadna para nie zajęła ex aequo tego samego miejsca, to końcowy ranking biegu może zostać ustalony na
[ ] $\frac{78!}{2!2!}$ sposobów;
[ ] 2^{39} sposobów;
[ ] $\binom{78}{39}$ sposobów.
5. Jeżeli $a = 3^{4^5}$, $b = 4^{5^3}$, $c = 5^{3^4}$, to
[ ] $a < b < c$;
[ ] $a = b = c$;
[ ] $a > b > c$.
6. O funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wiadomo, że ma okres podstawowy 2π, jest nieparzysta, jej zbiorem wartości jest przedział $[-1, 1]$ i punkt 0 jest jej miejscem zerowym. Wówczas
[ ] $f(x) = \sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$;
[ ] funkcja f nie jest monotoniczna na $\mathbb{R}$;
[ ] funkcja $g(x) = |f(x)|$ ma okres podstawowy 2π.
7. Prawdziwa jest nierówność
[ ] $\sqrt{3} + \sqrt{5} < \sqrt{1} + \sqrt{7}$;
[ ] $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{7}$;
[ ] $\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{5} < \sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{7}$.
8. Wielomian $W(x) = ax^5 + bx^3 + x^2 - bx + a$ przy dzieleniu przez każdy z dwumianów: $x - 1$, $x + 1$ i $x - 4$ daje tę samą resztę. Wówczas:
[ ] $a < b$;
[ ] $b > 0$;
[ ] $a < 0$.

9. Funkcja $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(5x + \frac{2}{3}\pi\right) - 1$

[ ] ma dokładnie 10 różnych miejsc zerowych na dowolnym przedziale domkniętym o długości 2π;

[ ] jest nieparzysta;

[ ] przyjmuje tylko wartości niedodatnie.

10. Ograniczony jest ciąg

[ ] $a_n = \sin\left(2013^n\right)$;

[ ] $b_n = \log_{2013} n$;

[ ] $c_n = 2013^{\cos n}$.

11. Piotr i Paweł wybierają losowo, niezależnie od siebie, po jednej krawędzi danego sześcianu (może się zdarzyć, że wybiorą tę samą krawędź). Niech p_1 oznacza prawdopodobieństwo, że wybrane przez nich krawędzie są rozłączne, p_2 - prawdopodobieństwo, że są równoległe, zaś p_3 - prawdopodobieństwo, że są skośne (czyli rozłączne i nierównoległe). Wówczas:

[ ] $p_2 + p_3 < 1$;

[ ] $p_1 > p_3$;

[ ] $p_3 > p_2$;

[ ] $p_1 = p_2 + p_3$.

12. Prawdziwe jest zdanie

[ ] $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ \left(x > y \Longrightarrow x > y^2\right)$;

[ ] $\forall_{y\in\mathbb{R}}\ \exists_{x\in\mathbb{R}}\ \left(x > y \Longrightarrow x > y^2\right)$;

[ ] $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}}\ \left(x > y \Longrightarrow x > y^2\right)$;

[ ] $\exists_{y\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \left(x > y \Longrightarrow x > y^2\right)$.

13. Liczbą wymierną jest

[ ] $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$;

[ ] $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}$;

[ ] $\left(\sqrt{2}-1\right)^9 - \left(\sqrt{2}+1\right)^9$;

[ ] $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

14. Dany jest układ równań $\begin{cases} a + 2c - d = 1 \\ 3a - b + 2d = 2 \\ 2a - b - 2c + d = 1 \\ -a + b + 4c = 2 \end{cases}$ z czterema niewiadomymi a, b, c, d. Układ ten

[ ] ma nieskończenie wiele rozwiązań;

[ ] jest sprzeczny;

[ ] ma dokładnie jedno rozwiązanie;

[ ] ma skończoną, większą od 1 liczbę rozwiązań.

15. Podzielna przez 4 jest liczba

[ ] $5^8 - 1$;

[ ] $5^7 - 1$;

[ ] $3^7 - 1$;

[ ] $3^8 - 1$.

16. Zbiorem wartości funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \cos\left(\sin 2013^x\right)$ jest

[ ] przedział $[-1, 1]$;

[ ] pewien przedział domknięty;

[ ] zbiór wypukły;

[ ] zbiór nieograniczony.

17. Wiadomo, że wielomian $W(x)$ można przedstawić w postaci $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, przy czym wielomian P jest stopnia 4, zaś wielomian Q stopnia 3. Wówczas

[ ] jeśli wielomian R jest stopnia 7, to wielomian W jest stopnia siódmego;

[ ] jeśli wielomian R ma co najmniej jedno miejsce zerowe, to wielomian W też ma co najmniej jedno miejsce zerowe;

[ ] jeśli wielomian R jest stały, to wielomian W ma co najmniej jedno miejsce zerowe;

[ ] jeśli wielomian R jest stały, to wielomian W ma co najmniej dwa miejsca zerowe.

18. Współczynnik kierunkowy prostej y jest równy $\frac{1}{2}$, jeżeli

[ ] prosta y jest dana równaniem $3x + 6y - 3 = 0$;

[ ] prosta y jest prostopadła do prostej o równaniu $x + 2y + 3 = 0$;

[ ] prosta y jest równoległa do prostej zawierającej punkty $(2, 4)$ i $(4, 8)$;

[ ] prosta y jest jedną ze stycznych do krzywej o równaniu $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$ przechodzącą przez punkt $(6, 6)$.

19. Wiadomo, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest ciągiem arytmetycznym. Wówczas

[ ] $(2^{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest ciągiem geometrycznym;

[ ] $(\sin a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ może być ciągiem arytmetycznym;

[ ] $(\cos a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ może być ciągiem stałym;

[ ] $((-1)^n \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest ciągiem monotonicznym.

20. Wiadomo, że α, β i γ są kątami wewnętrznymi pewnego trójkąta. Wówczas

[ ] jeżeli $\sin\alpha = 2\cos\beta\sin\gamma$, to trójkąt ten jest równoramienny;

[ ] jeżeli $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, to trójkąt ten jest prostokątny;

[ ] jeżeli $\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma > 0$, to trójkąt jest ostrokątny;

[ ] jeżeli $\sin\alpha\sin\beta > \sin\gamma$, to trójkąt ten może być równoramienny.

21. Trójkątami równobocznymi są ściany

[ ] czworościanu foremnego;

[ ] ośmiościanu foremnego;

[ ] dwunastościanu foremnego;

[ ] dwudziestościanu foremnego.

22. Wiadomo, że medianą zbioru n danych, gdzie n jest pewną liczbą naturalną, jest liczba 2013, zaś średnia arytmetyczna tego zbioru danych wynosi 0. Wówczas

[ ] jeśli zbiór danych powiększymy o liczbę 2013, to medianą nowego zbioru danych jest nadal liczba 2013;

[ ] odchylenie standardowe zbioru danych jest mniejsze od 2013^2;

[ ] jeśli zbiór danych powiększymy o liczbę 0, to 2013 nie będzie medianą nowego zbioru danych;

[ ] zbiór danych może zawierać więcej danych ujemnych niż dodatnich.

23. Funkcja $f(x) = (3m - 2)x^2 + 2mx - m + 1$

[ ] ma co najmniej jedno miejsce zerowe bez względu na wartość parametru $m \in \mathbb{R}$;

[ ] ma dwa miejsca zerowe różnych znaków wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$;

[ ] ma minimum globalne w punkcie (x_0, y_0) takim, że x_0 i y_0 są różnych znaków, wtedy i tylko wtedy, gdy $m < 0$;

[ ] jest parzysta tylko dla jednej wartości parametru $m \in \mathbb{R}$.

24. Mamy danych 2013 jednakowych sześciennych klocków o boku długości 1 cm. Wykorzystując wszystkie klocki, możemy z nich utworzyć

[ ] bryłę o polu powierzchni całkowitej równej 1774 cm^2;

[ ] bryłę o polu powierzchni całkowitj równej 8054 cm^2;

[ ] prostopadłościan o objętości 6039 cm^3;

[ ] prostopadłościan, którego jedną z podstaw jest kwadrat.

25. Prawdziwe jest zdanie:
[ ] dwusieczne dwóch sąsiednich kątów dowolnego równoległoboku przecinają się pod kątem prostym;
[ ] kąt ostry między dwusiecznymi kątów ostrych trójkąta prostokątnego wynosi zawsze $45°$;
[ ] jeżeli w sześciokącie foremnym połączymy ze sobą środki wszystkich sąsiadujących ze sobą boków, to pole otrzymanego w ten sposób nowego sześciokąta jest równe $\frac{2}{3}$ pola powierzchni wyjściowego sześciokąta;
[ ] stosunek pola koła opisanego na kwadracie do pola koła wpisanego w ten sam kwadrat wynosi $2:1$.

26. Antek wyszedł na pole zbierać ziemniaki o godzinie $7:00$, zaś Marysia dołączyła do niego o godzinie $8:00$. O godzinie $10:00$ okazało się, że zebrali już 55% wszystkich ziemniaków rosnących na polu. Gdy ukończyli zbieranie, stwierdzili, że każde z nich zebrało taką samą ilość ziemniaków. Gdyby Antek lub Marysia poszli zbierać ziemniaki osobno, to dla którejś z tych osób czas zebrania wszystkich ziemniaków z pola wyniósłby dokładnie
[ ] 6 godzin;
[ ] 8 godzin;
[ ] 10 godzin;
[ ] 12 godzin.

27. Wiadomo, że liczby całkowite dodatnie $a_1, ..., a_n$, gdzie $n \geq 3$, są kolejnymi wyrazami pewnego rosnącego ciągu arytmetycznego o wyrazach dodatnich i różnicy 1. Jeżeli $a_1 + ... + a_n = 300$, to n może przyjmować wartość
[ ] 4;
[ ] 5;
[ ] 6;
[ ] 7.

28. Dany jest układ równań $\begin{cases} 3y + 2xy = 1 \\ x^2 + 3x + y^2 = 4 \end{cases}$. Wówczas
[ ] układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań;
[ ] układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie (x_0, y_0) takie, że $x_0, y_0 > 0$;
[ ] zbiór punktów będących rozwiązaniem tego układu tworzy pewien okrąg o promieniu 2;
[ ] zbiór punktów będących rozwiązaniem tego układu tworzy niepusty zbiór wypukły.

29. Wymierna jest liczba
[ ] $\sin \frac{\pi}{8}$;
[ ] $\cos \frac{\pi}{8}$;
[ ] $\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{8}$;
[ ] $\mathrm{ctg}\, \frac{\pi}{8}$.

30. Kwadrat o boku 10 cm obrócono wokół osi zawierającej przekątną tego kwadratu, otrzymując pewną bryłę. Wówczas
[ ] objętość tej bryły wynosi 100π cm^3;
[ ] pole powierzchni tej bryły wynosi 200 cm^2;
[ ] bryła ta ma dokładnie dwie płaszczyzny symetrii;
[ ] bryła ta ma środek symetrii.