Piąty Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W świecie matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap drugi
12 lutego 2013 r.

Maksymalna do zdobycia ilość punktów: 80

1. Drugi etap Konkursu składa się z 4 zadań z treścią oraz 3 zadań z matematyki wyższej (do zadań tych dołączone są definicje, twierdzenia i przykłady pomocne w ich rozwiązywaniu).
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy numerze zadania.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Podczas tego etapu Konkursu dozwolone jest korzystanie z "Zestawu wybranych wzorów matematycznych" wydawanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
5. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4) zostaje on wykluczony z Konkursu.

Zadanie 1 (7 punktów)
Wykazać, że jeśli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zarówno ciągiem arytmetycznym jak i geometrycznym, to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem stałym.
Zadanie 2 (11 punktów)
Obserwator, który stoi na płaskim podłożu i ma oczy na wysokości dwóch metrów od ziemi patrzy na wprost na dużą nieprzezroczystą kulę o promieniu $R = 2$ metry. W jakiej odległości od brzegu kuli powinien znajdować się obserwator, aby widział on 49% powierzchni sfery? Zakładamy, że kąt rozwarcia pola widzenia obserwatora wynosi 180°. (Wskazówka: Pole powierzchni wycinka sfery jest wprost proporcjonalne do $(R-h)$, gdzie h jest odległością powierzchni cięcia od środka sfery.)
Zadanie 3 (11 punktów)
Rozważmy pewien skończony ciąg zer i jedynek, np. $(1,0,0,0,1,1,0,1)$. Serią nazywamy maksymalnej długości fragment ciągu, złożony z następujących po sobie jednakowych symboli (np. ciąg $(1,0,0,0,1,1,0,1)$ zawiera pięć serii, ciąg $(1,1,1,1,1,1)$ zawiera jedną serię). Niech n i k będą liczbami naturalnymi, przy czym $n \geq k$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losując bez zwracania spośród wszystkich ciągów zer i jedynek o długości n dwa ciągi, oba będą miały k serii?
Zadanie 4 (11 punktów)
Dla jakich par liczb rzeczywistych (x, y) spełniających warunek $x^2 + y^2 \leq 100$ wartość wyrażenia $x^2 + y^2 + 6x + 8y$ jest największa? Wyznacz tę wartość.

Zadanie 5 (12 punktów)

Definicja 1

Liczbę naturalną p nazywamy liczbą pierwszą, jeżeli ma ona dokładnie dwa dzielniki, czyli jest większa od 1 oraz dzieli się tylko przez 1 i przez samą siebie.

Twierdzenie 1 (Małe twierdzenie Fermata)

Jeżeli p jest liczbą pierwszą i liczba całkowita k nie jest podzielna przez p, to liczba $k^{p-1} - 1$ jest podzielna przez p.

Zadania do rowiązania:

a. Korzystając z małego twierdzenia Fermata wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^7 - n$ jest podzielna przez 7. (3 punkty)

b. Korzystając z małego twierdzenia Fermata udowodnić, że dla dowolnych różnych liczb pierwszych p i q liczba $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ jest podzielna przez pq. (4 punkty)

c. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną, która nie jest podzielna przez 2 ani przez 5. Korzystając z małego twierdzenia Fermata wykazać, że w zbiorze $\{9, 99, 999, 9999, ...\}$ istnieje co najmniej jedna liczba, która jest podzielna przez n. (5 punktów)

Zadanie 6 (14 punktów)

Defincja 2

Niech X, Y będą dwoma niepustymi zbiorami. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy:

a. funkcją różnowartościową (iniekcją), jeżeli $\forall_{x_1,x_2 \in X}\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$;

b. funkcją "na" (suriekcją), gdy $\forall_{y \in Y}\ \exists_{x \in X}\ y = f(x)$;

c. bijekcją, gdy jest iniekcją i suriekcją.

Przykład 1

Funkcja $f : [0,2] \to [0,4]$ dana wzorem $f(x) = x^2$ jest różnowartościowa (bo każdy element ze zbioru $[0,4]$ jest przyjmowany co najwyżej jeden raz) i jest suriekcją (bo każdy element ze zbioru $[0,4]$ jest przyjmowany co najmniej jeden raz). Funkcja f jest zatem bijekcją.

Przykład 2

Funkcja $f : [0,2] \to [0,6]$ dana wzorem $f(x) = x^2$ jest różnowartościowa, ale nie jest suriekcją (bo np. $5 \in [0,6]$ oraz równanie $f(x) = 5$ nie ma rozwiązania w zbiorze $[0,2]$).

Przykład 3

Korzystając z definicji 2 wykażemy, że funkcja $f : [0,2] \to [0,1]$ dana wzorem $f(x) = \log_3(x+1)$ jest bijekcją. Udowodnimy najpierw, że funkcja f jest różnowartościowa. Niech $x_1,\ x_2 \in [0,2]$. Załóżmy, że $f(x_1) = f(x_2)$, tzn. $\log_3(x_1+1) = \log_3(x_2+1)$. Korzystając z różnowartościowości funkcji logarytmicznej wnioskujemy, że $x_1+1 = x_2+1$. Stąd $x_1 = x_2$, a więc funkcja f jest iniekcją. Wykażemy teraz, że f jest "na". Niech $y \in [0,1]$. Wówczas $f(3^y - 1) = \log_3(3^y - 1 + 1) = \log_3 3^y = y$ oraz $3^y - 1 \in [0,2]$ (bo skoro $y \in [0,1]$, to $3^y \in [1,3]$ oraz $3^y - 1 \in [0,2]$). Zatem dla dowolnego $y \in [0,1]$ istnieje $x = 3^y - 1$, $x \in [0,2]$, taki że $f(x) = y$, a więc funkcja f jest suriekcją. Ostatecznie, f jest bijekcją.

Definicja 3

Dwa niepuste zbiory X i Y nazywamy równolicznymi, gdy istnieje funkcja $f : X \to Y$, która jest bijekcją.

Przykład 4

Zbiory $X = \{1,4,5\}$ oraz $Y = \{3,7,15\}$ są równoliczne na mocy Definicji 3, bo funkcja $f : X \to Y$ dana wzorem np. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x = 1 \\ 7 & \text{dla } x = 4 \\ 15 & \text{dla } x = 5 \end{cases}$ jest bijekcją.

Przykład 5

Zbiory $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ i $\mathbb{N} \cup \left\{\sqrt{2}\right\}$ są równoliczne. Jako bijekcję $f : \mathbb{N} \cup \left\{\sqrt{2}\right\} \to \mathbb{N}$ możemy wskazać funkcję $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } t = \sqrt{2} \\ t+1 & \text{gdy } t \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Zadania do rozwiązania:

Przy rozwiązywaniu poniższych zadań należy podać funkcję f, która jest bijekcją z jednego zbioru w drugi oraz korzystając z Definicji 2 wykazać, że funkcja ta jest bijekcją.

a. Wykazać, że zbiory liczb naturalnych i całkowitych są równoliczne. (4 punkty)

b. Wykazać, że zbiór $(0,2) \cup [5,7]$ jest równoliczny ze zbiorem $[-2,4] \cup (5,6)$. (4 punkty)

c. Wykazać, że zbiór $[0,1]$ jest równoliczny ze zbiorem $(0,1)$. (6 punktów)

Zadanie 7 (14 punktów)

Definicja 4

Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Działaniem wewnętrznym w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję $\circ : X \times X \to X$.

Uwaga 1

Aby udowodnić, że działanie $\circ : X \times X \to T$ nie jest działaniem wewnętrznym należy wskazać elementy $x_1, x_2 \in X$ takie, że $x_1 \circ x_2 \notin X$.

Przykład 6

Działanie + (dodawanie) jest działaniem wewnętrznym w zbiorze liczb naturalnych (bo suma dwóch liczb naturalnych jest liczbą naturalną). Działanie "$-$" (odejmowanie) nie jest działaniem wewnętrznym w zbiorze liczb naturalnych (bo różnica dwóch liczb naturalnych nie musi być liczbą naturalną, np. $5 - 7 = -2 \notin \mathbb{N}$). Działanie "$-$" jest jednak działaniem wewnętrznym w zbiorze liczb całkowitych.

Zadania do rozwiązania:

a. Wiedząc, że działania dodawania i mnożenia są działaniami wewnętrznymi w zbiorze liczb całkowitych wykazać, że działanie dodawania jest działaniem wewnętrznym w zbiorze liczb wymiernych. (3 punkty)

b. Niech $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exists_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) = 0\}$ (X jest zbiorem funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które mają co najmniej jedno miejsce zerowe). Sprawdzić, czy działanie "$\circ$" dane wzorem

$$\forall_{f,g\in X} \forall_{x\in\mathbb{R}}\ (f \circ g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

jest działaniem wewnętrznym. (5 punktów)

c. Niech $X = (1, \infty)$ oraz "$\circ$" będzie działaniem określonym wzorem

$$\forall_{x_1,x_2\in X}\ x_1 \circ x_2 = x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 2.$$

Sprawdzić, czy podane działanie jest działaniem wewnętrznym. (6 punktów)